ΤΑΞΗ: Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ

Ημερομηνία: Δευτέρα 5 Ιανουαρίου 2015
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 33.

Α2. Σχολικό βιβλίο σελ. 71.

Α3.
i. Λάθος
ii. Λάθος
iii. Σωστό
iv. Λάθος
v. Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Είναι $A=|4x-8|+1=|4(x-2)|+1=4|x-2|+1$

i. Αφού $x\in[2,+\infty)\Leftrightarrow x\geq 2\Leftrightarrow x-2\geq 0$, δηλαδή $|x-2|=x-2$.
Οπότε $A=4(x-2)+1=4x-8+1=4x-7$.

ii. **Αφού** $x\in(-\infty,2)\Leftrightarrow x<2\Leftrightarrow x-2<0$, δηλαδή $|x-2|=-(x-2)$.
Οπότε $A=-4(x-2)+1=-4x+8+1=-4x+9$.

Β2. Για $x\in[2,+\infty)$ είναι $A=4x-7$, οπότε ξεκινώντας από το πρώτο μέλος της ισότητας έχουμε:

$$\frac{16x^2-49}{|4x-8|+1}=\frac{(4x)^2-7^2}{4x-7}=\frac{(4x-7)(4x+7)}{4x-7}=4x+7$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. i.

Για το α έχουμε:

$$\alpha=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$$
$$=\frac{\sqrt{6}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}+\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}$$
$$=\frac{\left(\sqrt{6}\right)^2-\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}+\left(\sqrt{2}\right)^2}{\left(\sqrt{6}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}$$
$$=\frac{6+2}{6-2}=\frac{8}{4}=2$$

Για το β έχουμε:

$$\beta=\sqrt{25-3\sqrt{7+\sqrt[5]{32}}}=\sqrt{25-3\sqrt{7+2}}$$
$$=\sqrt{25-3\sqrt{9}}=\sqrt{25-3\cdot 3}=\sqrt{25-9}$$
$$=\sqrt{16}=4$$

Γ2. i.

Είναι $|\alpha-\beta|=|2-4|=|-2|=2$ και $\frac{|\alpha+\beta|}{2}=\frac{|2+4|}{2}=\frac{6}{2}=3$, οπότε η ανισότητα:

$$|\alpha-\beta|<x<\frac{|\alpha+\beta|}{2},$$

γίνεται $2<x<3$.
Τότε έχουμε $2<x<3 \Leftrightarrow 3\cdot 2<3x<3\cdot 3 \Leftrightarrow 6<3x<9$.
Οπότε

$$\left.\begin{array}{l}6<3x<9\\ 1<y-x<4\end{array}\right\}\Rightarrow 6+1<3x+y-x<9+4 \Leftrightarrow 7<2x+y<13$$

ii.

Αφού ω>0 έχουμε:

$$\omega+\frac{\alpha^2}{\omega}\geq\beta\Leftrightarrow\omega+\frac{2^2}{\omega}\geq 4\Leftrightarrow\omega+\frac{4}{\omega}\geq 4\Leftrightarrow\omega^2+\omega\cdot\frac{4}{\omega}\geq 4\omega\Leftrightarrow$$

$$\omega^2-4\omega+4\geq 0\Leftrightarrow(\omega-2)^2\geq 0$$

Η τελευταία σχέση είναι αληθής, οπότε και η αρχική.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. **i.** $(A\cup B)'$ **:** «Ο μαθητής δεν έχει ούτε κινητό ούτε tablet»

ii. $A\cap B$ **:** «Ο μαθητής έχει και κινητό και tablet»

Δ2. **i.** Επιλέγουμε τυχαία μαθητή και το 10% αυτών δεν έχει ούτε κινητό ούτε tablet, οπότε $P\left((A\cup B)'\right)=\frac{10}{100}=0,1$.

Επομένως

$$P\left((A\cup B)'\right)=1-P(A\cup B)\Leftrightarrow P(A\cup B)=1-P\left((A\cup B)'\right).$$

Οπότε $P(A\cup B)=1-0,1=0,9$ δηλαδή 90%.

ii. Επίσης το 30% έχει και κινητό και tablet, οπότε $P(A\cap B)=\frac{30}{100}=0,3$.

- $(A-B)\cup(B-A)$: «Ο μαθητής έχει μόνο κινητό ή μόνο tablet»

Τα ενδεχόμενα $A-B$ και $B-A$ είναι ασυμβίβαστα, οπότε από τον απλό προσθετικό νόμο προκύπτει ότι:

$$P\left((A-B)\cup(B-A)\right)=P(A-B)+P(B-A)=$$

$$=P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B)=$$

$$=P(A\cup B)-P(A\cap B)=0,9-0,3=0,6 \text{ δηλαδή } 60\%$$

Δ3. Είναι $P(A)=2P(B)$, οπότε από τον προσθετικό νόμο, για τα ενδεχόμενα Α και Β προκύπτει ότι:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Leftrightarrow 0,9=2P(B)+P(B)-0,3\Leftrightarrow$$

$$3P(B)=0,9+0,3\Leftrightarrow 3P(B)=1,2\Leftrightarrow P(B)=0,4 \text{ δηλαδή } 40\%$$

Επομένως $P(A)=2P(B)=2\cdot 0,4=0,8$ δηλαδή 80%.